Inverse

Autor und Herausgeber

Alexander Jung*, Department of Computer Science, Aalto University, Espoo, Finland (ORCID 0000-0001-7538-0990)
Editors: Konstantina Olioumtsevits (ORCID 0000-0003-2697-8659), Ekkehard Schnoor (ORCID 0000-0001-8252-1499), Aalto University, Espoo, Finland
*Corresponding author: alex.jung@aalto.fi

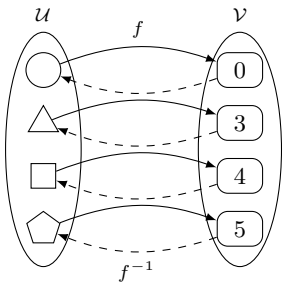
Zusammenfassung

Eine Inverse einer Funktion ist eine zweite Funktion, die sie rückgängig macht. Für $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ist sie die Funktion $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ mit $g(f(u)) = u$ und $f(g(v)) = v$, und sie existiert genau dann, wenn f injective ist und jedes Element von $\mathcal{V}$ ein nichtleeres preimage hat. Die Inverse einer lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ ist wiederum eine lineare Abbildung, dargestellt durch die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ mit $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, die genau dann existiert, wenn die quadratische Matrix $\mathbf{A}$ full-rank hat, äquivalent dazu, wenn ihre determinant ungleich Null ist. Wo keine Inverse existiert, tritt eine linke oder rechte Inverse oder die Moore–Penrose pseudoinverse an ihre Stelle. Im machine learning (ML) treten Inversen in der geschlossenen Lösung der lineare Regression, in dem Paar, das durch die Sigmoidfunktion und den logit gebildet wird und einen Score in eine Wahrscheinlichkeit und zurück umwandelt, sowie beim Ziehen einer Realisierung durch die Inverse einer Verteilungsfunktion auf.

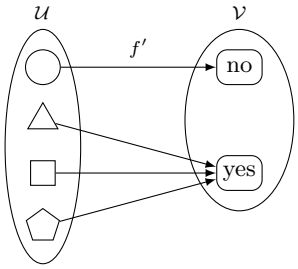
Definition

Eine Frostwarnung für Krems an der Donau liefert einen reellwertigen Score für den Tag, und die Sigmoidfunktion wandelt diesen Score in die Wahrscheinlichkeit für Frost um: Der Score 0 wird zur Wahrscheinlichkeit 0.5, der Score 2.2 wird zu 0.9. Das Zurücklesen des Scores aus einer gemeldeten Wahrscheinlichkeit macht diesen Schritt rückgängig, und die Funktion, die dies tut, ist der logit $\ln\big(p/(1-p)\big)$. Der logit ist die Inverse der Sigmoidfunktion.

Eine Inverse einer Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ist eine Funktion $g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, die sie in beide Richtungen rückgängig macht: $g\big(f(u)\big) = u$ für jedes $u \in \mathcal{U}$ und $f\big(g(v)\big) = v$ für jedes $v \in \mathcal{V}$. Ein solches g existiert genau dann, wenn f injective ist und jedes $v \in \mathcal{V}$ ein nichtleeres preimage hat. Sie ist dann eindeutig und wird als f^{-1} geschrieben. Wenn nur die erste Identität gilt, ist g eine linke Inverse, und wenn nur die zweite gilt, eine rechte Inverse. Abb. 1 zeigt beide Fälle für eine Funktion auf einem Definitionsbereich von vier Formen.



(a) one arrow into each value



(b) three arrows into one value

Abbildung 1: Zwei Funktionen auf demselben Definitionsbereich $\mathcal{U}$ von vier Formen, wobei $\mathcal{U}$ und die Menge $\mathcal{V}$ der Werte jeweils als dünne Ellipse gezeichnet sind. In (a) bildet die Funktion f eine Form auf ihre Eckenzahl ab, und jeder Wert von $\mathcal{V} = \{0, 3, 4, 5\}$ erhält genau einen durchgezogenen Pfeil, sodass das Rückwärtsverfolgen der Pfeile die Inverse f^{-1} (gestrichelte Pfeile) definiert, die die Form mit dieser Eckenzahl zurückgibt. In (b) erfasst die Funktion f' nur, ob eine Form eine gerade Kante hat. Drei Formen teilen sich den Wert „Ja“, daher macht keine Funktion f' rückgängig: Der Wert „Ja“ sagt nicht aus, welche Form ihn erzeugt hat.

Das bekannteste Beispiel ist die Inverse einer lineare Abbildung. Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ repräsentiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ in sich selbst, und diese Abbildung hat genau dann eine Inverse, wenn $\mathbf{A}$ full-rank hat, was bedeutet, dass ihre Spalten linearly independent sind (Horn and Johnson, 2013, Sect. 0.5). Eine solche Matrix wird als invertible bezeichnet. Die inverse lineare Abbildung ist selbst eine lineare Abbildung (Axler, 2024, Thm. 3.63), und die sie repräsentierende Matrix ist die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, die erfüllt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Eine quadratische Matrix ist invertible genau dann, wenn ihre determinant ungleich Null ist (Axler, 2024, Thm. 9.50; Horn and Johnson, 2013, Sect. 0.5). Abb. 2 zeigt die beiden lineare Abbildungen, die auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ wirken.

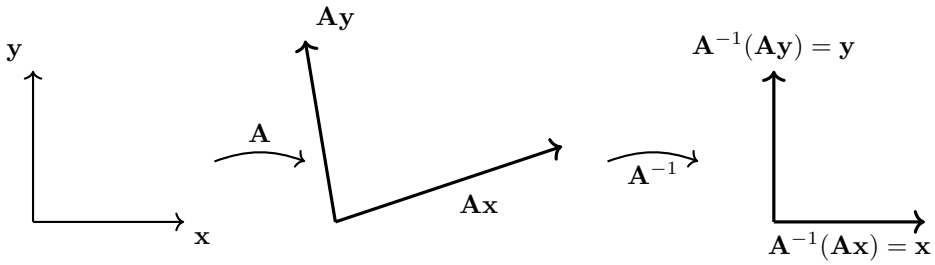


Abbildung 2: Matrix $\mathbf{A}$, die eine lineare Transformation von $\mathbb{R}^2$ darstellt; inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, die die inverse Transformation darstellt.

Für eine Matrix, die nicht quadratisch ist oder nicht full-rank hat, bleiben die einseitigen Inversen: eine linke Inverse $\mathbf{B}$ erfüllt $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, und eine rechte Inverse $\mathbf{C}$ erfüllt $\mathbf{AC} = \mathbf{I}$. Die Moore–Penrose pseudoinverse $\mathbf{A}^+$ wählt eine verallgemeinerte Inverse für jede Matrix aus (Golub and Van Loan, 2013, Sect. 5.5.2).

Inversen werden im gesamten machine learning (ML) verwendet. Das Lösen eines Systems von lineare Gleichungen ist eine Aufgabe, und die Ridge-Regression eine andere: Ihre geschlossene Lösung invertiert die Matrix $\mathbf{X}^\top\mathbf{X} + \alpha\mathbf{I}$, die für jede positive Regularisierung-Stärke α invertible ist. Die Sigmoidfunktion und der logit des einleitenden Absatzes bilden ein invertierbares Paar, das die Übersetzung zwischen dem Score einer linearer Klassifikator und einem Wahrscheinlichkeit-Wert ermöglicht. Eine Merkmalstransformation, die invertible ist, verliert keine Information, da der rohe Merkmalsvektor aus dem transformierten wiederhergestellt werden kann. Die Inverse einer stetigen Verteilungsfunktion ermöglicht die Erzeugung von Realisierungen einer Zufallsvariable (ZV) mit dieser Verteilungsfunktion aus einer Realisierung einer anderen, einfacheren ZV, die gleichmäßig auf $[0, 1]$ verteilt ist (Ross, 2014, Sect. 10.2.1).

Eine counterfactual Erklärung für eine gelernte Hypothese kann aus einer rechten Inversen davon konstruiert werden, die für eine gegebene Vorhersage einen Merkmalsvektor ihres preimage zurückgibt. Eine gelernte Hypothese bildet normalerweise viele Merkmalsvektoren auf dieselbe Vorhersage ab, daher hat sie keine Inverse und keine linke Inverse; eine rechte Inverse ist das, was bleibt, und die Wahl, welches Element des preimage sie zurückgibt, macht eine counterfactual nützlicher als eine andere.

Siehe auch: Funktion, injective, preimage, invertible, Matrix, lineare Abbildung, determinant, pseudoinverse, lineare Regression, Sigmoidfunktion, logit.

Querverweise

Literatur

1. Axler (2024). Linear Algebra Done Right. 4th ed., Springer, Cham, Switzerland.

2. Golub and Van Loan (2013). Matrix Computations. 4th ed., The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, USA.

3. Horn and Johnson (2013). Matrix Analysis. 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, NY, USA.

4. Ross (2014). A First Course in Probability. 9th ed., Pearson Education, Boston, MA, USA.