Eigenvektor

Autor und Herausgeber

Alexander Jung*, Department of Computer Science, Aalto University, Espoo, Finland (ORCID 0000-0001-7538-0990)
Editors: Konstantina Olioumtsevits (ORCID 0000-0003-2697-8659), Ekkehard Schnoor (ORCID 0000-0001-8252-1499), Aalto University, Espoo, Finland
*Corresponding author: alex.jung@aalto.fi

Zusammenfassung

Ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ ist ein von Null verschiedener Vektor $\mathbf{x}$, den $\mathbf{A}$ auf ein Vielfaches seiner selbst abbildet, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Die Zahl λ ist der zu $\mathbf{x}$ gehörende Eigenwert, sodass die Multiplikation mit $\mathbf{A}$ den Vektor $\mathbf{x}$ auf der von ihm aufgespannten Geraden hält und ihn nur skaliert. Ein Eigenvektor ist nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor bestimmt: Die zu einem Eigenwert gehörenden Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Null-Vektor den nullspace von $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, einen Unterraum von $\mathbb{R}^d$. Für eine symmetrische Matrix können die Eigenvektoren so gewählt werden, dass sie eine orthonormale Basis bilden, und deren Zusammenfassung als Spalten einer Matrix ergibt die Eigenwertzerlegung. Die Eigenvektoren der sample covariance matrix eines Datensatz sind die Richtungen, die Hauptkomponentenanalyse (PCA) beibehält und verwirft. Das Beibehalten derjenigen, die zu den größten Eigenwerte gehören, hinterlässt einen Rekonstruktionsfehler, der der Summe der weggelassenen Eigenwerte entspricht.

Definition

Jeder Tag des Jahres 2024 an der Wetterstation Krems an der Donau (Österreich) ist ein Datenpunkt, dessen zwei Merkmale die Lufttemperatur um 06:00 (UTC) und um 15:00 (UTC) dieses Tages in Grad Celsius sind. Die sample covariance matrix $\widehat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $m = 365$ Tage, für die beide Merkmale vorliegen, bildet die meisten Richtungen der Ebene auf eine andere Richtung ab. Zwei Richtungen sind Ausnahmen: Die Matrix gibt jede von ihnen skaliert und ansonsten unverändert zurück, und diese beiden sind ihre Eigenvektoren. Die Tage streuen am weitesten entlang der Geraden, die vom Eigenvektor mit dem größeren Skalierungsfaktor aufgespannt wird, und Abb. 1 zeichnet diese Gerade durch den Stichprobenmittel der Tage zusammen mit dem Abstand jedes gezeichneten Tages von ihr.

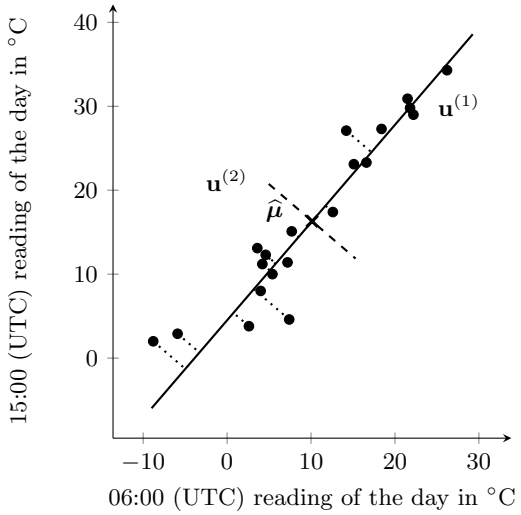

Abbildung 1: Jeder 19 der 365 Tage des Jahres 2024 in Krems an der Donau, insgesamt 20 Tage, als gefüllte Kreise gezeichnet. Jeder Tag ist ein Datenpunkt mit zwei Merkmale, seinem 06:00 (UTC) und seinem 15:00 (UTC) Messwert. Die durchgezogene Linie verläuft durch den Stichprobenmittel $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ (Kreuz) entlang des Eigenvektors $\mathbf{u}^{(1)}$ der sample covariance matrix aller 365 Tage, und die gestrichelte Linie verläuft durch denselben Punkt entlang des Eigenvektors $\mathbf{u}^{(2)}$. Die gepunkteten Segmente verbinden die 20 gezeichneten Tage mit dem nächstgelegenen Punkt der durchgezogenen Linie. Daten generiert von `pythondemos/eigenvector.py`

Formal ist ein von Null verschiedener Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{1}$$

und diese Zahl ist dann der zu $\mathbf{x}$ gehörende Eigenwert (Strang, 2016, Sect. 6.1). Das Bild $\mathbf{A}\mathbf{x}$ ist ein Vielfaches von $\mathbf{x}$, sodass es auf der von $\mathbf{x}$ aufgespannten Geraden bleibt. Der Null-Vektor ist ausgeschlossen, da er die definierende Gleichung (1) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt und somit keine Richtung auszeichnet.

Ein Eigenvektor ist nur bis auf einen von Null verschiedenen Faktor bestimmt: Wenn $\mathbf{x}$ die definierende Gleichung (1) erfüllt, so tut dies auch $c\mathbf{x}$ für jedes von Null verschiedene $c \in \mathbb{R}$, mit demselben λ. Die zu einem Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren bilden zusammen mit dem Null-Vektor den *Eigenraum* von $\mathbf{A}$ für λ, welcher der nullspace von $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^d$ ist (Horn and Johnson, 2013, Def. 1.4.2). Hier ist $\mathbf{I}$ die Einheits-Matrix. Jeder Eigenraum der sample covariance matrix in Krems ist eine Gerade durch den Ursprung, während die Matrix $2\mathbf{I}$ den einzelnen Eigenwert 2 hat, dessen Eigenraum die gesamte Ebene ist. Eine Implementierung gibt daher Eigenvektoren der Einheits-Norm zurück, und selbst dann bleibt ihr Vorzeichen beliebig.

Symmetrie schränkt die Eigenvektoren weiter ein. Für eine reelle symmetrische Matrix ist jeder Eigenwert reell, und die Eigenvektoren können so gewählt werden, dass sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^d$ bilden (Horn and Johnson, 2013, Thm. 4.1.5; Strang, 2016, Sect. 6.4). Das Sammeln einer solchen Basis als Spalten einer Matrix ergibt die Eigenwertzerlegung der symmetrische Matrix, welche dann eine spectral decomposition ist. Die sample covariance matrix $\widehat{\mathbf{C}}$ ist symmetrisch, weshalb sich die beiden Linien in Abb. 1 in einem rechten Winkel treffen. Ohne Symmetrie müssen die Eigenvektoren nicht orthogonal sein: Die Matrix mit den Zeilen $(1.3, 0.8)$ und $(0.4, 0.9)$ hat die Eigenvektoren $(2, 1)^\top$ und $(-1, 1)^\top$, deren Skalarprodukt -1 ist.

Eigenvektoren sind das, was Hauptkomponentenanalyse (PCA) berechnet. PCA, eine Methode zur Dimensionsreduktion, ersetzt die d Merkmale eines Datenpunkt durch $d' < d$ Zahlen, die so gewählt werden, dass eine lineare Abbildung den Merkmalsvektor aus ihnen mit dem kleinsten durchschnittlichen squared error loss über einen Datensatz rekonstruiert. Dieser Rekonstruktionsfehler ist das empirical risk einer Instanz von empirische Risikominimierung (ERM), und die Eigenvektoren der sample covariance matrix, die zu ihren d' größten Eigenwerte gehören, erreichen ihr minimum, welches der Summe der weggelassenen Eigenwerte entspricht (Bishop, 2006, Sect. 12.1.2). Für die beiden Temperaturen in Krems mit $d' = 1$ ist die beibehaltene Richtung der in Abb. 1 gezeichnete Eigenvektor $\mathbf{u}^{(1)}$ und der verworfene Eigenwert ist $\lambda_2 = 6.9$ Quadratgrad, die durchschnittliche quadratische Länge der gepunkteten Segmente über alle 365 Tage. Die beiden Eigenwerte addieren sich zu 153.4 Quadratgrad, sodass die beibehaltene Richtung alles bis auf 4.5 Prozent dieser Summe behält, während eine Linie durch den Stichprobenmittel, die um 30 Grad von $\mathbf{u}^{(1)}$ abgewandt ist, 41.8 Quadratgrad zurücklassen würde.

Siehe auch: Eigenwert, Eigenwertzerlegung, spectral decomposition, Matrix, Vektor, nullspace, Unterraum, symmetrische Matrix, orthonormal, Basis, lineare Abbildung, sample covariance matrix, PCA, Dimensionsreduktion.

Querverweise

Literatur

1. Bishop (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer Science+Business Media, New York, NY, USA.

2. Horn and Johnson (2013). Matrix Analysis. 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, NY, USA.

3. Strang (2016). Introduction to Linear Algebra. 5th ed., Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, MA, USA.